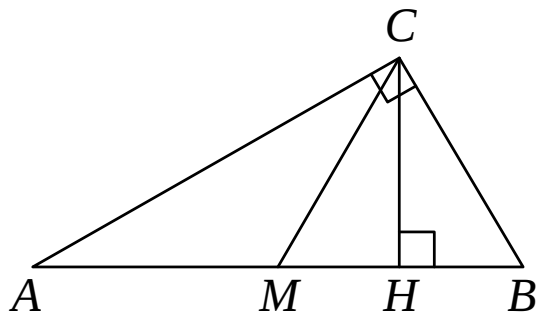
Пробный вариант №1

Часть 1

1 Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 65°. Найдите величину угла между высотой CH и медианой CM, проведёнными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.



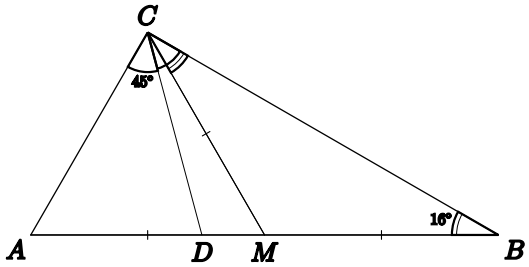
Решение В прямоугольном треугольнике ABC прямой угол расположен при вершине C, а высота CH и медиана CM проведены из этой же вершины к гипотенузе AB.

Рассмотрим треугольник BCH: он прямоугольный, так как высота перпендикулярна гипотенузе, то есть $\angle CHB = 90^\circ$. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, поэтому

$$\angle BCH = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ.$$

Точка M — середина гипотенузы, поэтому медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы: $CM = AM = BM$. Значит, треугольник BCM равнобедренный, и углы при основании, лежащие против равных сторон, равны между собой. Угол, лежащий против стороны CM, — это угол MBC, то есть угол B самого треугольника ABC; угол, лежащий против стороны BM, — это угол BCM. Поэтому

$$\angle BCM = \angle B = 65^\circ.$$



Угол $A = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$ меньше угла B, поэтому основание высоты H лежит ближе к вершине B, чем середина M, то есть луч CH проходит внутри угла BCM. Значит, искомый угол между высотой и медианой равен разности:

$$\angle HCM = \angle BCM - \angle BCH = 65^\circ - 25^\circ = 40^\circ.$$

Ответ: 40.

Ответ: 40

2 Даны векторы $\vec{a}(5;\,4)$ и $\vec{b}(8;\,-9)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

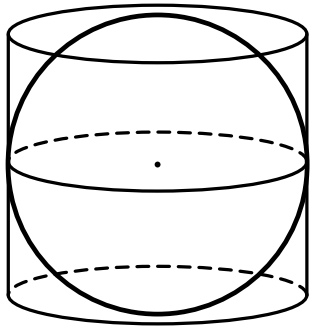
Решение Скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1;\,y_1)$ и $\vec{b}(x_2;\,y_2)$ равно $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$. Подставим координаты $\vec{a}(5;\,4)$ и $\vec{b}(8;\,-9)$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5\cdot 8 + 4\cdot(-9) = 40 - 36 = 4.$$

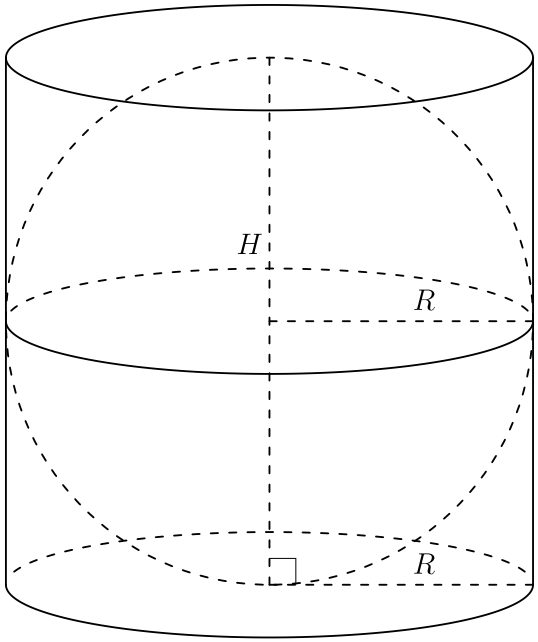
Ответ: 4.

Ответ: 4

3 Шар, объём которого равен 18, вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра.



Решение Если шар вписан в цилиндр, радиус основания цилиндра равен радиусу шара R, а высота цилиндра равна диаметру шара: $H = 2R$.



Объём шара:

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = 18 \quad \Rightarrow \quad \pi R^3 = \frac{3}{4}\cdot 18 = 13{,}5.$$

Объём цилиндра:

$$V_{\text{ц}} = \pi R^2 H = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = 2\cdot 13{,}5 = 27.$$

Ответ: 27.

Ответ: 27

4 Фабрика выпускает сумки. В среднем 6 сумок из 75 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

Решение Из общего числа сумок вычтем дефектные — получим число исправных:

$$75 - 6 = 69.$$

Любая из 75 сумок может быть куплена с одинаковой вероятностью, поэтому

$$P = \frac{69}{75} = \frac{23}{25} = 0{,}92.$$

Ответ: 0,92.

Ответ: 0,92

5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

Решение Вероятность попадания при отдельном выстреле равна 0,7, значит, вероятность промаха равна $1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Выстрелы по разным мишеням независимы, поэтому вероятность события «попал в первую мишень и промахнулся по трём последним» равна произведению вероятности попадания по первой мишени на вероятности промаха по трём оставшимся:

$$P = 0{,}7\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}3 = 0{,}7\cdot 0{,}3^3 = 0{,}0189.$$

Ответ: 0,0189.

Ответ: 0,0189

6 Организаторы лотереи выпустили 10 000 билетов. Выигрыши распределены следующим образом.

Выигрыш (в рублях)	100	1000	5000	10 000	50 000
Число выигрышных билетов	500	100	50	10	1

Найдите математическое ожидание величины «выигрыш на один билет». Ответ дайте в рублях.

Решение Обозначим через X случайную величину «выигрыш на один билет». Вероятность выпадения конкретного выигрыша равна числу билетов с этим выигрышем, делённому на общее количество билетов — 10 000. У билетов без выигрыша значение X равно нулю, и соответствующее слагаемое в сумме для математического ожидания равно нулю, поэтому его можно не выписывать.

По формуле математического ожидания дискретной случайной величины $\mathrm{E}(X) = \sum x_i p_i$ получаем:

$$\mathrm{E}(X) = 100\cdot\frac{500}{10\,000} + 1000\cdot\frac{100}{10\,000} + 5000\cdot\frac{50}{10\,000} + 10\,000\cdot\frac{10}{10\,000} + 50\,000\cdot\frac{1}{10\,000}.$$

Знаменатель у всех слагаемых одинаков, поэтому сначала сложим числители, а затем один раз разделим на 10 000:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{100\cdot 500 + 1000\cdot 100 + 5000\cdot 50 + 10\,000\cdot 10 + 50\,000\cdot 1}{10\,000} = \frac{550\,000}{10\,000} = 55.$$

Ответ: 55.

Ответ: 55

7 Найдите корень уравнения $2^{x-3} = \frac{1}{16}$.

Решение В уравнении $2^{x-3}=\dfrac{1}{16}$ представим правую часть как степень с основанием 2: так как $2^4=16$, то $\dfrac{1}{16}=2^{-4}$. Получаем

$$2^{x-3}=2^{-4}.$$

Приравниваем показатели:

$$x-3=-4,$$
$$x=3-4=-1.$$

Ответ: -1.

Ответ: -1

8 Найдите значение выражения $5\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{8}\cdot\cos\frac{3\pi}{8}$.

Решение Домножим и разделим выражение на 2, чтобы получить формулу синуса двойного угла $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$:

$$5\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot 2\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\sin\frac{3\pi}{4}.$$

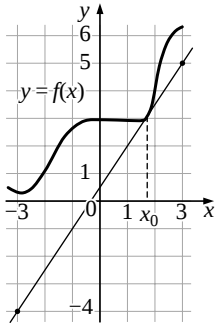
Так как $\sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, подставим это значение:

$$\frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5\cdot 2}{4}=2{,}5.$$

Ответ: 2,5.

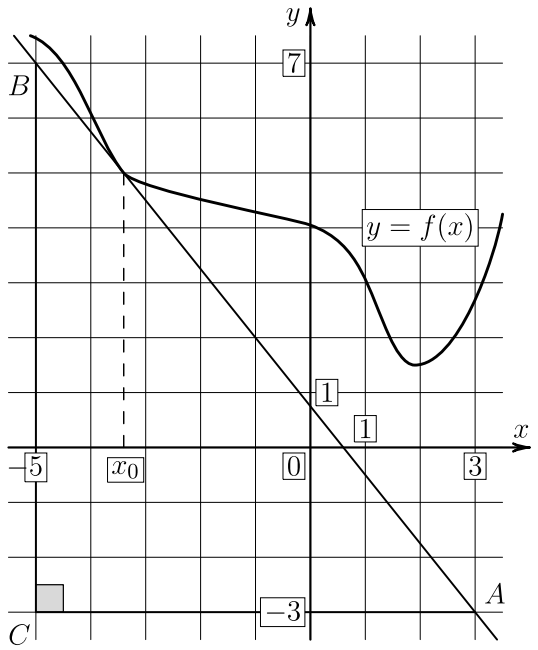
Ответ: 2,5

9 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной.

Касательная проходит через точки $(-3;-4)$ и $(3;5)$.



$$f'(x_0)=\frac{5-(-4)}{3-(-3)}=\frac{9}{6}=1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

Ответ: 1,5

10 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч^2). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v=\sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1 км, приобрести скорость 120 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

Решение Скорость при разгоне с ускорением a на пути l задана формулой $v=\sqrt{2la}$. Подставим $v=120$ км/ч, $l=1$ км:

$$120=\sqrt{2\cdot 1\cdot a}.$$

Возведём обе части в квадрат (обе части неотрицательны, поэтому это равносильный переход):

$$120^2=2a,\qquad 14400=2a.$$

Отсюда

$$a=\frac{14400}{2}=7200.$$

Ответ: 7200.

Ответ: 7200

11 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 48 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 10 часов. Ответ дайте в км/ч.

Решение Пусть скорость теплохода в неподвижной воде равна x км/ч, при этом $x > 4$. По течению скорость теплохода равна $(x + 4)$ км/ч, против течения — $(x - 4)$ км/ч. Время движения по течению равно $\dfrac{48}{x+4}$ ч, против течения — $\dfrac{48}{x-4}$ ч.

Теплоход вернулся через 10 часов после выхода, из них 5 часов — стоянка, значит, на движение ушло $10 - 5 = 5$ часов:

$$\frac{48}{x+4} + \frac{48}{x-4} = 5.$$

Приведём левую часть к общему знаменателю:

$$\frac{48(x-4) + 48(x+4)}{x^2 - 16} = 5;$$

$$\frac{96x}{x^2 - 16} = 5,$$

откуда

$$96x = 5(x^2 - 16);$$

$$5x^2 - 96x - 80 = 0.$$

Дискриминант $D = 9216 + 1600 = 10816 = 104^2$, корни:

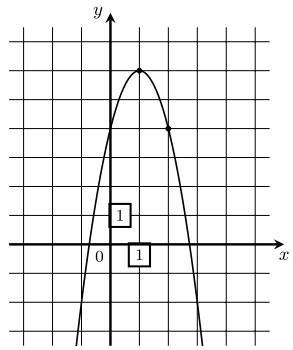
$$x_1 = \frac{96 + 104}{10} = 20, \qquad x_2 = \frac{96 - 104}{10} = -0{,}8.$$

Так как $x > 4$, подходит $x = 20$.

Ответ: 20.

Ответ: 20

12 На рисунке изображён график функции $f(x) = -2x^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-2)$.



Решение График функции $f(x) = -2x^2 + bx + c$ проходит через точку $(0; 4)$. При $x = 0$ значение функции равно c, поэтому $c = 4$.

График также проходит через точку $(1; 6)$. Подставим $x = 1$:

$$f(1) = -2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 4 = 6, \qquad -2 + b + 4 = 6, \qquad b = 4.$$

Значит,

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 4.$$

Найдём $f(-2)$:

$$f(-2) = -2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 4 = -2 \cdot 4 - 8 + 4 = -8 - 8 + 4 = -12.$$

Ответ: -12.

Ответ: -12

13 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено 375000 рублей?

Решение Обозначим сумму кредита S рублей, платёж в 2026, 2027, 2028 и 2029 годах — x рублей (кредит взят в июле 2025 года), $k = 1 + \dfrac{25}{100} = \dfrac{5}{4}$.

Из общей суммы выплат находим платёж: $4x = 375000$, то есть $x = 93750$ рублей.

Год	Долг до %	Долг после %	Платёж	Долг после платежа
2026	S	kS	x	$kS-x$
2027	$kS-x$	k^2S-kx	x	$k^2S-kx-x$
...	...	...	x	...
2029	...	...	x	0

После четвёртого платежа долг равен нулю:

$$k^4S-k^3x-k^2x-kx-x=0 \quad\Rightarrow\quad k^4S=x(k^3+k^2+k+1).$$

Свернём сумму в скобках по формуле суммы геометрической прогрессии и выразим S:

$$k^3+k^2+k+1=\frac{k^4-1}{k-1} \quad\Rightarrow\quad S=\frac{x(k^4-1)}{k^4(k-1)}.$$

Подставим $k=\dfrac{5}{4}$:

$$S=x\cdot\frac{\frac{5^4}{4^4}-1}{\frac{5^4}{4^4}\cdot\frac{1}{4}}=x\cdot\frac{5^4-4^4}{5^4}\cdot 4=x\cdot\frac{4\cdot 369}{625}=x\cdot\frac{1476}{625}.$$

Так как $93750:625=150$, получаем

$$S=150\cdot 1476=221400 \text{ рублей}.$$

Ответ: 221400.

Ответ: 221400

Часть 2

14 а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sqrt{3}\cos^2 x=\cos x-2\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение а) Уравнение определено при всех x.

Распишем синус суммы по формуле $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x.$$

Значит, $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$. Подставим в уравнение:

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x-2\sqrt{3}\cos^2 x=\cos x-2\sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3}\sin x-2\sqrt{3}\cos^2 x+2\sqrt{3}=0.$$

Разделим обе части на $\sqrt{3}\neq 0$:

$$\sin x-2\cos^2 x+2=0.$$

По основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x=1-\sin^2 x$:

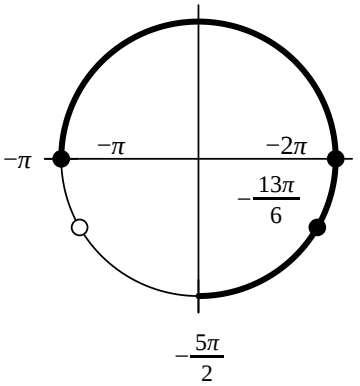
$$\sin x-2(1-\sin^2 x)+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin^2 x+\sin x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin x(2\sin x+1)=0.$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Серия $x=\pi k$ — правая и левая точки окружности, серия $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$ — точка IV четверти, серия $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$ — точка III четверти.

б) Отберём корни на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$. Число $-\dfrac{5\pi}{2}$ отвечает нижней точке окружности, число $-\pi$ — левой. Длина отрезка $\dfrac{3\pi}{2}$, поэтому дуга идёт от нижней точки против часовой стрелки через правую (-2π) и верхнюю ($-\dfrac{3\pi}{2}$) до левой и покрывает IV, I и II четверти.



Из серии $x=\pi k$ на отрезок попадают правая точка -2π и левая $-\pi$ (правый конец): соседние значения $-3\pi<-\dfrac{5\pi}{2}$ и $0>-\pi$.

Из серии $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$ на отрезок попадает только точка IV четверти $-2\pi-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{13\pi}{6}$: соседние значения $-\dfrac{25\pi}{6}<-\dfrac{15\pi}{6}=-\dfrac{5\pi}{2}$ и $-\dfrac{\pi}{6}>-\pi$.

Серия $x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$ даёт точку III четверти, которую дуга не покрывает: $-\dfrac{17\pi}{6}<-\dfrac{15\pi}{6}=-\dfrac{5\pi}{2}$, а следующее значение $-\dfrac{5\pi}{6}>-\pi$.

На отрезке лежат $-\dfrac{13\pi}{6}$, -2π, $-\pi$.

Ответ: а) πk, $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k$, $-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{13\pi}{6}$; -2π; $-\pi$.

Критерии

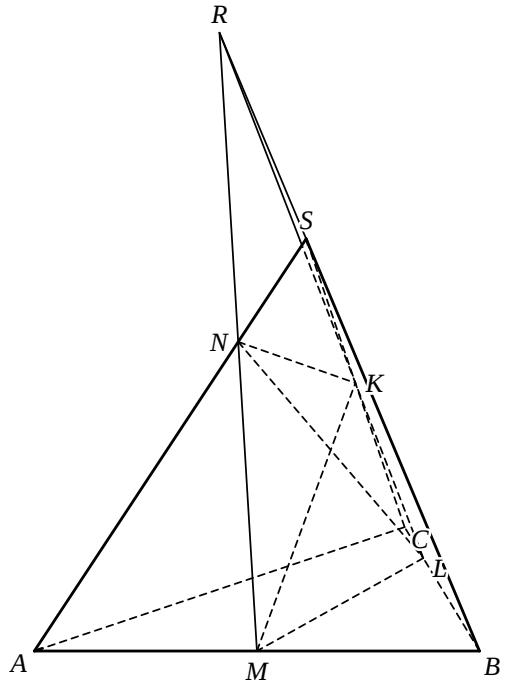
- **2 балла** — обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах
- **1 балл** — обоснованно получен верный ответ в пункте а) или получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но есть верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов
- **0 баллов** — решение не соответствует ни одному из критериев выше

15 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точки M и K — середины рёбер AB и SC соответственно, а точки N и L отмечены на рёбрах SA и BC соответственно так, что отрезки MK и NL пересекаются, а $AN=3NS$.

а) Докажите, что прямые MN, KL и SB пересекаются в одной точке.

б) Найдите отношение $BL:LC$.

Решение



а) Отрезки MK и NL пересекаются, а через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость. Обозначим её β: в ней лежат все четыре точки M, K, N, L.

Точки M и N лежат в плоскости β и в плоскости грани SAB, поэтому эти плоскости пересекаются по прямой MN. Точки K и L лежат в плоскости β и в плоскости грани SBC, поэтому эти плоскости пересекаются по прямой KL. Сами грани SAB и SBC пересекаются по прямой SB.

Докажем, что MN не параллельна SB. Если бы $MN\parallel SB$, то по теореме о пропорциональных отрезках в треугольнике SAB было бы

$$\frac{AN}{NS}=\frac{AM}{MB}=1,$$

а по условию $AN:NS=3$. Значит, прямые MN и SB, лежащие в одной плоскости SAB, пересекаются. Обозначим точку пересечения R.

Точка R лежит на MN, то есть в плоскости β, и на SB, то есть в плоскости SBC. Значит, R лежит на линии пересечения этих плоскостей — прямой KL. Итак, прямые MN, KL и SB проходят через одну точку R, что и требовалось доказать.

б) По теореме Менелая для треугольника SAB и прямой MNR:

$$\frac{AN}{NS}\cdot\frac{SR}{RB}\cdot\frac{BM}{MA}=1\quad\Rightarrow\quad 3\cdot\frac{SR}{RB}\cdot 1=1\quad\Rightarrow\quad\frac{BR}{RS}=3.$$

По теореме Менелая для треугольника SBC и прямой RKL (учитываем, что K — середина SC):

$$\frac{BR}{RS}\cdot\frac{SK}{KC}\cdot\frac{CL}{LB}=1\quad\Rightarrow\quad 3\cdot 1\cdot\frac{CL}{LB}=1\quad\Rightarrow\quad\frac{BL}{LC}=3.$$

Ответ: б) 3 : 1.

Критерии

- **3 балла** — имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)
- **2 балла** — обоснованно получен верный ответ в пункте б) или имеется верное доказательство пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
- **1 балл** — имеется верное доказательство пункта а), или при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, или обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а) без его доказательства
- **0 баллов** — решение не соответствует ни одному из критериев выше

16 Решите неравенство $3^{\log_3(4-x^2)}+x^4-10\geq 0$.

Решение Найдём ОДЗ. Аргумент логарифма должен быть положительным:

$$4 - x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x+2) < 0.$$



ОДЗ: $x \in (-2; 2)$.

На ОДЗ применим основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$ (при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$):

$$3^{\log_3 (4 - x^2)} = 4 - x^2.$$

Неравенство принимает вид

$$4 - x^2 + x^4 - 10 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - x^2 - 6 \geqslant 0.$$

Сделаем замену $y = x^2$, $y \geqslant 0$:

$$y^2 - y - 6 \geqslant 0.$$

Корни трёхчлена по теореме, обратной теореме Виета (сумма 1, произведение -6), — 3 и -2, поэтому неравенство запишется как $(y - 3)(y + 2) \geqslant 0$. Решим методом интервалов, нули закрашиваем:



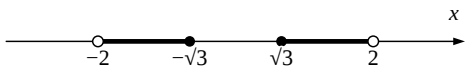
Получаем $y \leqslant -2$ или $y \geqslant 3$. Но $y = x^2 \geqslant 0$, поэтому случай $y \leqslant -2$ невозможен. Остаётся

$$x^2 \geqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) \geqslant 0.$$



Получаем $x \leqslant -\sqrt{3}$ или $x \geqslant \sqrt{3}$.

Пересечём с ОДЗ $(-2; 2)$. Так как $3 < 4$, имеем $\sqrt{3} < 2$ и $-2 < -\sqrt{3}$. Остаётся $-2 < x \leqslant -\sqrt{3}$ или $\sqrt{3} \leqslant x < 2$.



Ответ: $\left(-2; -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}; 2\right)$.

Критерии

- **2 балла** — обоснованно получен верный ответ
- **1 балл** — обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением или включением граничных точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки при верной последовательности всех шагов решения
- **0 баллов** — решение не соответствует ни одному из критериев выше

17 На заводе имеется генератор с ЭДС $\varepsilon = 50$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом. Инженер подключает к генератору нагрузку, используя реостат, чтобы установить сопротивление нагрузки R (в омах). Сила тока в цепи (в амперах) определяется законом Ома: $I = \dfrac{\varepsilon}{r + R}$. Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая в нагрузке, может быть рассчитана по формуле Джоуля–Ленца: $P = I^2 R$. Какова максимальная тепловая мощность P, которая может быть выделена нагрузкой?

Решение Составим модель. Подставим силу тока из закона Ома в формулу мощности:

$$P = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{r + R}\right)^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r + R)^2}.$$

По условию $\varepsilon = 50$ В и $r = 1$ Ом, поэтому $\varepsilon^2 = 2500$ и мощность зависит только от сопротивления нагрузки:

$$P(R) = \frac{2500R}{(1 + R)^2}.$$

Сопротивление нагрузки — положительная величина, поэтому рассматриваем функцию на промежутке $R > 0$. Там знаменатель не обращается в ноль, и функция определена. Нужно найти её наибольшее значение на этом промежутке.

Найдём производную по правилу дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, где $u = 2500R$, $u' = 2500$, $v = (1 + R)^2$. Производную v найдём по правилу дифференцирования сложной функции: $v' = 2(1 + R) \cdot (1 + R)' = 2(1 + R)$. Получаем

$$P'(R) = \frac{2500 \cdot (1 + R)^2 - 2500R \cdot 2(1 + R)}{(1 + R)^4}.$$

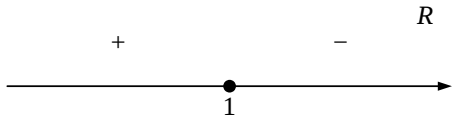
Вынесем в числителе общий множитель $2500(1 + R)$ и сократим дробь на $1 + R \neq 0$:

$$P'(R) = \frac{2500(1 + R)(1 + R - 2R)}{(1 + R)^4} = \frac{2500\,(1 - R)}{(1 + R)^3}.$$

Найдём нули производной. При $R > 0$ знаменатель $(1 + R)^3$ положителен, поэтому производная существует на всём промежутке и

$$P'(R) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R = 1.$$

Определим знаки производной. Знак P' совпадает со знаком $1 - R$: плюс при $0 < R < 1$ и минус при $R > 1$. Например, $P'(3) = \dfrac{2500 \cdot (-2)}{64} < 0$. Отметим знаки на промежутке $R > 0$ (крайний левый промежуток на рисунке — это $(0; 1)$):



Значит, функция $P(R)$ возрастает на $(0; 1]$ и убывает на $[1; +\infty)$. Поэтому $R = 1$ — точка максимума, и при любом другом $R > 0$ мощность меньше, чем при $R = 1$. Наибольшее значение мощности равно

$$P(1) = \frac{2500 \cdot 1}{(1+1)^2} = \frac{2500}{4} = 625.$$

Проверим результат без производной. Перевернём дробь: $\dfrac{(1+R)^2}{R} = R + 2 + \dfrac{1}{R}$. По неравенству о средних $R + \dfrac{1}{R} \geqslant 2$, причём равенство достигается только при $R = 1$. Значит, $\dfrac{(1+R)^2}{R} \geqslant 4$ и $P \leqslant \dfrac{2500}{4} = 625$ — результат совпал.

Ответ: 625 Вт.

Критерии

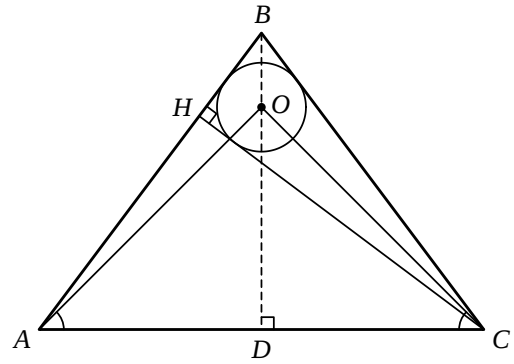
- **2 балла** — обоснованно получен верный ответ
- **1 балл** — верно построена математическая модель
- **0 баллов** — решение не соответствует ни одному из критериев выше

18 Окружность с центром O касается боковых сторон AB и BC равнобедренного остроугольного треугольника ABC и его высоты CH.

а) Докажите, что $\angle OAC = 45^\circ$.

б) Найдите длину отрезка BC, если $BO = 1$ и $AC = 6$.

Решение



а) Боковые стороны треугольника — AB и BC, поэтому AC — основание и углы при нём равны. Обозначим $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$. Треугольник остроугольный, значит, $\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha < 90^\circ$, откуда $\alpha > 45^\circ$. Кроме того, в остроугольном треугольнике основание высоты лежит на стороне, поэтому точка H лежит на отрезке AB.

Окружность касается отрезка BH (он часть стороны AB), стороны BC и высоты CH, то есть всех трёх сторон треугольника BHC. Значит, это вписанная окружность треугольника BHC, а её центр O — точка пересечения биссектрис этого треугольника. В частности, CO — биссектриса угла BCH.

Найдём углы при вершине C. В прямоугольном треугольнике ACH ($\angle AHC = 90^\circ$) сумма острых углов равна 90°:

$$\angle ACH = 90^\circ - \angle CAH = 90^\circ - \alpha.$$

Луч CH лежит внутри угла ACB, поэтому

$$\angle BCH = \angle BCA - \angle ACH = \alpha - (90^\circ - \alpha) = 2\alpha - 90^\circ.$$

Биссектриса CO делит этот угол пополам:

$$\angle HCO = \frac{2\alpha - 90^\circ}{2} = \alpha - 45^\circ.$$

Луч CO лежит внутри угла HCB, значит, луч CH проходит между лучами CA и CO, и углы складываются:

$$\angle OCA = \angle ACH + \angle HCO = (90^\circ - \alpha) + (\alpha - 45^\circ) = 45^\circ.$$

Теперь перейдём к вершине A. Окружность касается обеих сторон угла ABC, поэтому её центр равноудалён от сторон этого угла и лежит на его биссектрисе. В равнобедренном треугольнике ABC биссектриса, проведённая к основанию, является также медианой и высотой, то есть лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Каждая точка серединного перпендикуляра равноудалена от концов отрезка, поэтому $OA = OC$.

Треугольник AOC равнобедренный, углы при его основании AC равны:

$$\angle OAC = \angle OCA = 45^\circ.$$

Что и требовалось доказать.

б) Пусть D — середина основания AC. Как мы выяснили в пункте а), отрезок BD — биссектриса, медиана и высота треугольника ABC, поэтому $BD \perp AC$ и центр O лежит на прямой BD. Точка O находится внутри треугольника BHC, а значит, и внутри треугольника ABC, поэтому она лежит на отрезке BD между точками B и D.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AOD ($\angle ADO = 90^\circ$). По пункту а) $\angle OAD = 45^\circ$, тогда и $\angle AOD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Треугольник AOD равнобедренный, поэтому

$$OD = AD = \frac{AC}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

Тогда

$$BD = BO + OD = 1 + 3 = 4.$$

По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике BDC с катетами $BD = 4$ и $DC = 3$:

$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Проверим, что треугольник со сторонами $AB = BC = 5$, $AC = 6$ действительно остроугольный. Углы при основании равнобедренного треугольника всегда острые, а угол B острый, так как $AC^2 = 36 < AB^2 + BC^2 = 50$. Значит, условие выполнено.

Ответ: б) 5.

Критерии

- **3 балла** — имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)
- **2 балла** — обоснованно получен верный ответ в пункте б) или имеется верное доказательство пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки
- **1 балл** — имеется верное доказательство пункта а), или при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, или обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а) без его доказательства
- **0 баллов** — решение не соответствует ни одному из критериев выше

19 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(3x + |\, x - a \,| + |\, 2x + a + 1 \,|)^2 - a(3x + |\, x - a \,| + |\, 2x + a + 1 \,|) + a^2 - 16 = 0$$

имеет ровно один корень.

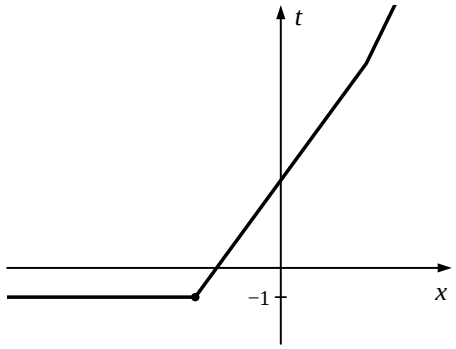
Решение Обозначим $g(x) = 3x + |\, x - a \,| + |\, 2x + a + 1 \,|$ и сделаем замену $t = g(x)$. Уравнение примет вид

$$t^2 - at + a^2 - 16 = 0. \qquad (1)$$

Исследуем функцию g. Она непрерывна и кусочно-линейна. На каждом промежутке, где модули раскрываются с постоянными знаками, её угловой коэффициент равен $3 \pm 1 \pm 2$, то есть одному из чисел 6, 4, 2, 0. Нулевой коэффициент получается, только если оба модуля раскрываются с минусом: $x < a$ и $2x + a + 1 < 0$, то есть при $x < p$, где $p = \min\left(a; -\dfrac{a+1}{2}\right)$. На этом луче

$$g(x) = 3x - (x - a) - (2x + a + 1) = -1.$$

При $x > p$ хотя бы один модуль раскрывается с плюсом, и угловой коэффициент равен 2, 4 или 6 — он положителен. Значит, $g(x) = -1$ на луче $(-\infty; p]$, а на $[p; +\infty)$ функция строго возрастает от -1 до $+\infty$.



Отсюда для каждого корня t уравнения (1):

- если $t < -1$, уравнение $g(x) = t$ корней не имеет;
- если $t = -1$, корней бесконечно много (весь луч $x \leqslant p$);
- если $t > -1$, корень ровно один (функция непрерывна и строго возрастает на $[p; +\infty)$).

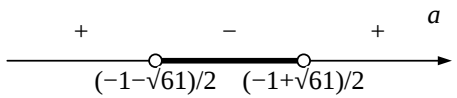
Поэтому исходное уравнение имеет ровно один корень тогда и только тогда, когда уравнение (1) имеет ровно один корень, больший -1, а число -1 его корнем не является. Это происходит в двух случаях: корни уравнения (1) лежат по разные стороны от -1, или уравнение (1) имеет единственный (двойной) корень, больший -1.

Пусть $h(t) = t^2 - at + a^2 - 16$ — квадратичная функция, ветви параболы направлены вверх.

Случай 1: корни по разные стороны от -1. Это равносильно условию $h(-1) < 0$ (тогда дискриминант положителен автоматически):

$$1 + a + a^2 - 16 < 0; \qquad a^2 + a - 15 < 0.$$

Корни трёхчлена $a^2 + a - 15$: $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+60}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{61}}{2}$.

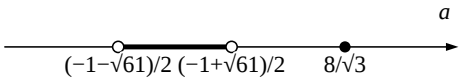


Получаем $a \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{61}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{61}}{2}\right)$.

Случай 2: двойной корень больше −1. Двойной корень бывает при нулевом дискриминанте: $D = a^2 - 4(a^2-16) = 64 - 3a^2 = 0$, $a = \pm\dfrac{8}{\sqrt{3}}$. Этот корень равен $t_0 = \dfrac{a}{2}$, и условие $t_0 > -1$ означает $a > -2$. Подходит только $a = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$. При $a = -\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ корень $t_0 = -\dfrac{4}{\sqrt{3}} < -1$, и исходное уравнение корней не имеет.

Остальные значения не подходят. При $h(-1) = 0$ число $t = -1$ — корень уравнения (1), и исходное уравнение имеет бесконечно много корней. При $h(-1) > 0$ и $D > 0$ оба корня уравнения (1) лежат по одну сторону от -1: если оба больше -1, корней x два, если оба меньше — ни одного. При $D < 0$ корней нет.

Значение $\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ не входит в промежуток из случая 1: $\dfrac{8}{\sqrt{3}} > 4$, так как $64 > 48$, а $\dfrac{-1+\sqrt{61}}{2} < 4$, так как $\sqrt{61} < 9$.



Ответ: $a \in \left(\dfrac{-1-\sqrt{61}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{61}}{2}\right) \cup \left\{\dfrac{8}{\sqrt{3}}\right\}$.

Критерии

- **4 балла** — обоснованно получен верный ответ
- **3 балла** — с помощью верного рассуждения получено множество значений параметра, отличающееся от искомого конечным числом точек
- **2 балла** — с помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений параметра
- **1 балл** — верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений параметра
- **0 баллов** — решение не соответствует ни одному из критериев выше

20 На доске написано n единиц подряд. Между некоторыми из них расставляют знаки «+» и считают получившуюся сумму. Например, если было написано 10 единиц, то можно получить сумму 136: $1 + 1 + 111 + 11 + 11 + 1 = 136$.

а) Можно ли получить сумму 113, если $n = 50$?

б) Можно ли получить сумму 114, если $n = 50$?

в) Какую наибольшую четырёхзначную сумму можно получить, если $n = 50$?

Решение После расстановки плюсов сумма состоит из слагаемых вида 1, 11, 111, 1111, … Слагаемое из k единиц использует ровно k единиц с доски. Порядок слагаемых может быть любым, поэтому важно только, сколько слагаемых каждого вида.

Пусть в сумме x слагаемых 1, y слагаемых 11, z слагаемых 111, w слагаемых 1111 и так далее. Всего на доске 50 единиц, поэтому

$$x + 2y + 3z + 4w + ... = 50.$$

а) Возьмём 36 слагаемых 1 и 7 слагаемых 11:

$$\underbrace{11 + 11 + ... + 11}_{\text{7 слагаемых}} + \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{\text{36 слагаемых}} = 7 \cdot 11 + 36 = 77 + 36 = 113.$$

Использовано единиц: $7 \cdot 2 + 36 \cdot 1 = 14 + 36 = 50$ — ровно столько, сколько написано. Значит, сумму 113 получить можно.

б) Предположим, что сумма 114 получилась. Слагаемые 1111 и больше превосходят 114, поэтому их нет, и в сумме участвуют только 1, 11 и 111:

$$\begin{cases} x + 11y + 111z = 114, \\ x + 2y + 3z = 50. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$9y + 108z = 64.$$

Левая часть делится на 9, а 64 на 9 не делится. Противоречие, значит, сумму 114 получить нельзя.

в) *Оценка.* Пусть сумма четырёхзначная, то есть не больше 9999. Слагаемых из пяти и более единиц нет: каждое из них не меньше $11\,111 > 9999$. Значит, в сумме участвуют только 1, 11, 111 и 1111, и

$$x + 2y + 3z + 4w = 50.$$

Покажем, что $w \leqslant 8$. Так как $1111w \leqslant 9999$, то $w \leqslant 9$. Если $w = 9$, то слагаемые 1111 используют 36 единиц и дают 9999, а оставшиеся 14 единиц дают ещё хотя бы 14 (слагаемое из k единиц не меньше k). Тогда сумма не меньше $9999 + 14 = 10\,013$ — пятизначная. Значит, $w \leqslant 8$.

Теперь оценим вклад слагаемых 1, 11, 111. На одну использованную единицу слагаемое 1 даёт 1, слагаемое 11 даёт $\frac{11}{2}=5{,}5$, а слагаемое 111 даёт $\frac{111}{3}=37$. Поэтому

$$x+11y+111z\leqslant 37x+37\cdot 2y+37\cdot 3z=37(x+2y+3z)=37(50-4w).$$

Значит, вся сумма не больше

$$1111w+37(50-4w)=1111w+1850-148w=963w+1850\leqslant 963\cdot 8+1850=7704+1850=9554.$$

Пример. Возьмём 8 слагаемых 1111 и 6 слагаемых 111:

$$\underbrace{1111+\ldots+1111}_{8\text{ слагаемых}}+\underbrace{111+\ldots+111}_{6\text{ слагаемых}}=8888+666=9554.$$

Использовано единиц: $8\cdot 4+6\cdot 3=32+18=50$. Сумма 9554 четырёхзначная, значит, оценка достигается.

Ответ: а) да; б) нет; в) 9554.

Критерии

- **4 балла** — верно получены все четыре результата из критерия на 1 балл
- **3 балла** — верно получены три результата из критерия на 1 балл
- **2 балла** — верно получены два результата из критерия на 1 балл
- **1 балл** — верно получен один из результатов: обоснованное решение пункта а); обоснованное решение пункта б); искомая оценка в пункте в); пример в пункте в), доказывающий точность оценки
- **0 баллов** — решение не соответствует ни одному из критериев выше